

ANALISI DEGLI EFFETTI DELLE APPROSSIMAZIONI DELLO SPETTRO REALE DI CARICO SUL DANNEGGIAMENTO DELLE SINGOLE DENTATURE

F. Concli^a, C. Gorla^b

^a Politecnico di Milano - Dipartimento di Meccanica, Via La Masa 1, Milano
e-mail: franco.concli@mail.polimi.it

^b Politecnico di Milano - Dipartimento di Meccanica, Via La Masa 1, Milano
e-mail: carlo.gorla@polimi.it

Sommario

Molto spesso, in fase di progettazione di una trasmissione vengono introdotte ipotesi semplificative o tralasciati alcuni aspetti considerati minori. Frequentemente si trascura l'effettiva storia temporale dei carichi sul generico dente derivanti dall'interazione tra le frequenze del carico esterno e quelle di ingranamento del singolo stadio. Così facendo non si considera l'esatto spettro di carico per ogni dente di ogni ruota. Sarebbe invece auspicabile un approccio che, tenendo conto di questi aspetti, consentisse una previsione più accurata della vita della dentatura. Si presenta un'applicazione che permette la determinazione dell'effettiva storia di carico su ogni dente di ogni ruota a partire dallo spettro di carico esterno e dalla configurazione della trasmissione. Nota per ogni dente la storia di sollecitazione, risulta anche possibile calcolare il danneggiamento che ogni dente ha accumulato durante il periodo di esercizio. Nel documento si riportano i risultati dell'applicazione di tale procedura di calcolo ad un caso pratico.

Abstract

During the design of power transmissions, often some aspects will be neglected or some hypothesis will be introduced in order to simplify the calculations. In order to improve the accuracy of the design, it results important to succeed in describing in an accurate way the behavior of the transmission so that to be able to improve the project by reducing, for example, weight and encumbrance. Having a tool that determine the real spectrum that acts on every tooth of every gear of the transmission would allow the accurate determination of the mechanical component durability. The following work proposes an application that allows the individualization in an accurate way of the forces on the generic tooth of the generic gear of the transmission starting from the loads acting on the transmission and it's configuration and it calculates the damage accumulated following a period of use of the transmission.

Parole chiave: trasmissioni, ingranaggi, fatica flessionale

1. INTRODUZIONE

Nella pratica industriale, durante la progettazione di una trasmissione, è frequente il ricorso ad approssimazioni riguardo i carichi agenti; questo è spesso dovuto all'impossibilità di conoscere a priori quelli che saranno le reali storie di carico lato utilizzatore. Tali approssimazioni comportano, però, la necessità di introdurre opportuni coefficienti di sicurezza. L'utilizzo della reale storia di carico

lato utilizzatore per la progettazione consentirebbe l'ottenimento di previsioni più attendibili e quindi la possibilità di ridurre i margini di sicurezza.

Il seguente lavoro presenta la metodologia per il calcolo delle storie di carico agenti sul singolo dente a partire dall'andamento dei carichi esterni e dalla configurazione della trasmissione. Verranno riportati i risultati dell'applicazione di tale procedura ad un caso reale in cui si evidenzieranno le differenze che le consuete approssimazioni usate in fase di progettazione introducono in termini di vita della dentatura.

2. DETERMINAZIONE DELLE SORIE DI CARICO DELLA SINGOLA DENTATURA

La procedura di calcolo delle storie di carico agenti sul singolo dente della singola ruota della trasmissione ha carattere generale ed è applicabile ad una qualsiasi trasmissione di potenza. Figura 1 mostra il procedimento di calcolo che verrà poi spiegato dettagliatamente nei paragrafi successivi.

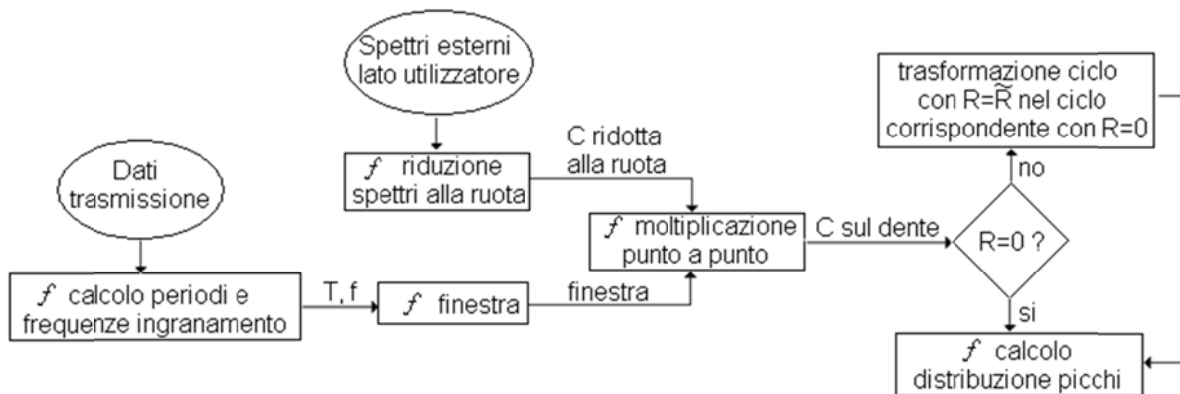


Fig.1: procedimento di calcolo delle storie di carico sulla singola dentatura

Partendo dalle storie di carico lato utilizzatore caratteristiche dell'utilizzo che viene fatto della trasmissione e dalla sua configurazione risulta possibile calcolare gli spettri di carico agenti su ogni ruota. Infatti, tenendo conto delle frequenze di ingranamento e dei fattori di ricoprimento, risulta possibile determinare gli andamenti temporali delle forze sul singolo dente di ogni ruota.

A partire da tale andamento nel tempo verranno poi ricostruiti gli effettivi cicli di carico su ciascuna dentatura, verranno conteggiati e, se necessario, trasformati in cicli equivalenti a rapporto di fatica nullo, in modo da poter essere comparati con le curve di fatica del materiale (tipicamente ricavate con prove pulsanti dallo zero). Ricostruite le effettive storie di carico per ciascun dente risulta quindi possibile valutare gli effetti delle varie approssimazioni usate in fase di progettazione e l'effetto di eventuali sovravvarichi durante il funzionamento.

Tale procedimento verrà qui descritto basandosi su un esempio pratico di applicazione della metodologia.

2.1. Flussi di potenza

A seconda della complessità della trasmissione, i flussi di potenza all'interno di essa possono essere semplici o ripartiti su più rami. Nel caso più elementare si ha un solo ingresso ed una sola uscita ed il flusso di potenza risulta unico. In altri casi, vi sono trasmissioni più articolate in cui la potenza fluisce da più ingressi a più uscite. Per tali applicazioni risulterà importante individuare nel modo corretto i flussi della potenza all'interno della trasmissione.

L'approccio qui proposto parte, per l'analisi delle sollecitazioni sui denti, dalle storie di carico esterne (lato utilizzatore) risalendo poi a ritroso i vari stadi della trasmissione. Nel caso di sistemi complessi (come ad esempio le trasmissioni aeronautiche), quindi, per l'analisi delle sollecitazioni saranno necessarie, come dati di partenza, tante storie di carico esterne quante saranno le uscite della trasmissione.

2.2. Frequenze di ingranamento

Conoscendo le velocità di rotazione delle singole ruote risulta possibile calcolarne il periodo di rotazione secondo la formula

$$T_{ruota} = \frac{60}{\omega_{ruota}} \quad (1)$$

Noti i periodi di rotazione risulta possibile anche il calcolo delle frequenze di ingranamento dei denti della ruota analizzata

$$f_{dente} = \frac{z}{T_{ruota}} \quad (2)$$

Nel caso di ruote oziose la frequenza di ingranamento risulterà doppia rispetto ad un ingranamento ordinario (ingranando i denti con due ruote, una conduttrice ed una condotta, durante una rivoluzione). L'inverso di tali frequenze non risulta però essere il periodo per cui i denti sono a contatto durante il funzionamento del sistema in quanto non viene ancora tenuto in considerazione il rapporto di condotta trasversale ε_α .

2.3. Finestre di ingranamento

Il rapporto di condotta trasversale tiene conto del fatto che vi è sempre un numero medio di denti in presa maggiore di uno. Questo per garantire la continuità dell'ingranamento e quindi una trasmissione più regolare del moto. All'inizio dell'ingranamento, infatti, il dente precedente risulta ancora in presa. In questa fase la coppia trasmessa si ripartirà, quindi, su entrambe le dentature a contatto (in quote dipendenti dal rapporto delle rigidità delle coppie di denti, variabile a seconda della posizione del punto di contatto sul fianco). Con il procedere dell'ingranamento si arriva ad una condizione per cui una sola coppia di denti risulta in presa e, quindi, trasmette da sola tutto il carico. Risulta pertanto possibile individuare tre fasi distinte durante l'ingranamento: nella prima, definita tra inizio contatto (punto A in figura 2a) e punto di contatto singolo più esterno per la ruota condotta (B) ed in cui le coppie di denti a contatto risultano essere due, si ipotizza il carico essere ripartito equamente (ogni dente trasmette solo il 50% della coppia). Nella seconda, in cui il punto di contatto giace tra il punto di contatto singolo più esterno (B) ed il punto di contatto singolo più interno per la ruota condotta (D), tutto il carico viene trasmesso dall'unica coppia di denti in presa. Nella terza fase, il contatto risulta compreso tra il punto di contatto singolo più interno per la ruota condotta (D) e la fine dell'ingranamento (E) per cui, in analogia con la prima fase, si ipotizza il carico essere ripartito equamente tra le coppie di denti ingranate.

Rispetto alle finalità di questo lavoro non risulta infatti indispensabile calcolare nel modo esatto la ripartizione del carico tra le coppie di denti e l'approssimazione proposta risulta sufficientemente accurata.

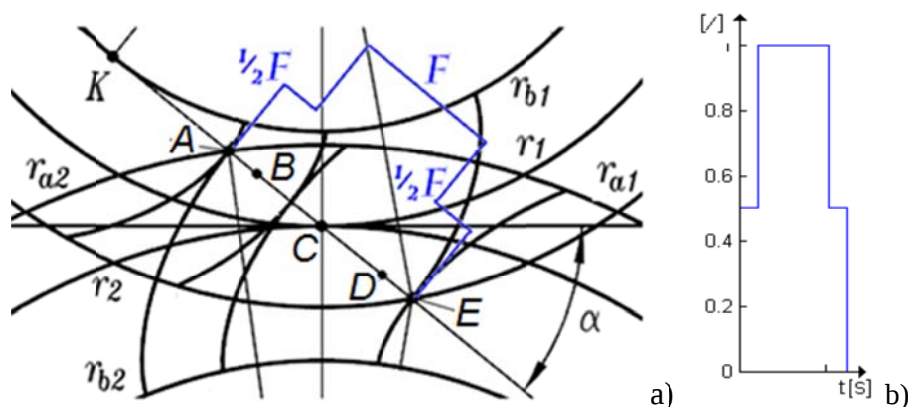


Fig.2: a) geometria dell'ingranamento; b) funzione di ripartizione della forza tra i denti

In base al rapporto di condotta trasversale ε_α risulterà possibile creare delle funzioni come quella di figura 2b: la durata temporale di tale finestra risulta essere l'inverso della frequenza di ingranamento moltiplicato per il rapporto di condotta trasversale e rappresenta, in forma approssimata, la ripartizione dei carichi sul dente durante il tempo in cui questo risulta in presa.

Per ogni dente risulta inoltre possibile creare delle “finestre di ingranamento” rappresentative di come un generico carico (costante) lo solleciti durante una rotazione completa della ruota a cui appartiene.

Questo, infatti, rimane non caricato per una frazione di giro pari a $\frac{(T_{ruota} - \frac{1}{f_{dente}} \varepsilon_\alpha)}{T_{ruota}}$ in cui non risulta essere in presa per poi venir caricato e scaricato a livelli discreti ($\frac{1}{2}F \rightarrow F \rightarrow \frac{1}{2}F$) durante l'ingranamento.

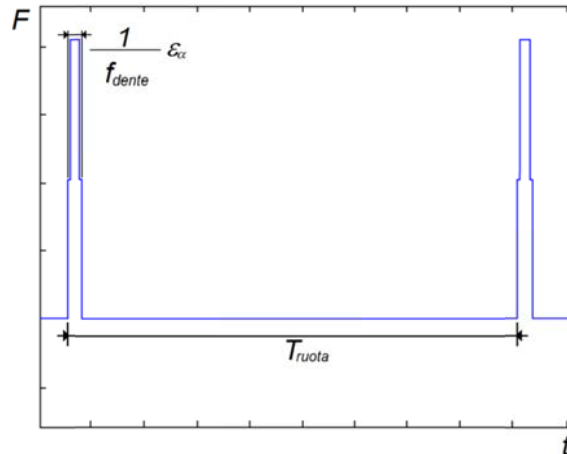


Fig.3: finestra di ingranamento: è rappresentativa di come un dente viene sollecitato nel caso di coppia trasmessa costante

2.4. Coppie ridotte sulla generica ruota

Sfruttando la relazione fondamentale delle ruote dentate

$$C_1 = C_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (3)$$

risulta possibile derivare lo spettro di carico agente sulla generica ruota dall'andamento temporale della coppia resistente esterna (lato utilizzatore). In pratica, per trasmissioni ad un solo ramo, la storia di carico sulla singola ruota avrà lo stesso andamento di quella esterna, riscalata in base ai rapporti di riduzione di tutti gli stadi a valle. Nel caso di trasmissioni a più rami, a monte dell'ultima divisione dei flussi, le varie ruote risentiranno di una storia di carico somma dei vari andamenti dei carichi esterni (uno per ogni uscita), ognuno opportunamente riscalato.

2.5. Coppie ridotte sul generico dente

Nota l'andamento temporale della coppia su una generica ruota e noto come il singolo dente viene progressivamente caricato e scaricato durante una rivoluzione dell'ingranaggio (“finestra di ingranamento”), risulta possibile ricavare il reale andamento del carico sul singolo dente in relazione all'andamento esterno.

La figura 4 mostra i passaggi che permettono la determinazione dall'andamento temporale del carico valido per il singolo dente dall'andamento temporale valido per la ruota cui questo appartiene.

Moltiplicando “punto a punto” la storia di carico valida per la ruota per la “finestra di ingranamento”, risulta possibile ottenere l'andamento dei carichi sul dente. Si noti come, essendo anche in questo caso semplice (carichi esterni perfettamente sinusoidali) le frequenze di ingranamento e della storia di carico agente sulla ruota molto differenti, l'andamento nel tempo del carico sul singolo dente sia totalmente differente rispetto al carico sulla ruota. Risulta inoltre importante tenere in considerazione lo sfasamento tra la configurazione attuale della trasmissione e le storie di carico esterne. A seconda

della configurazione in cui la trasmissione si trova all’inizio dell’esercizio, le storie di carico sui singoli denti potranno risultare anche molto differenti.

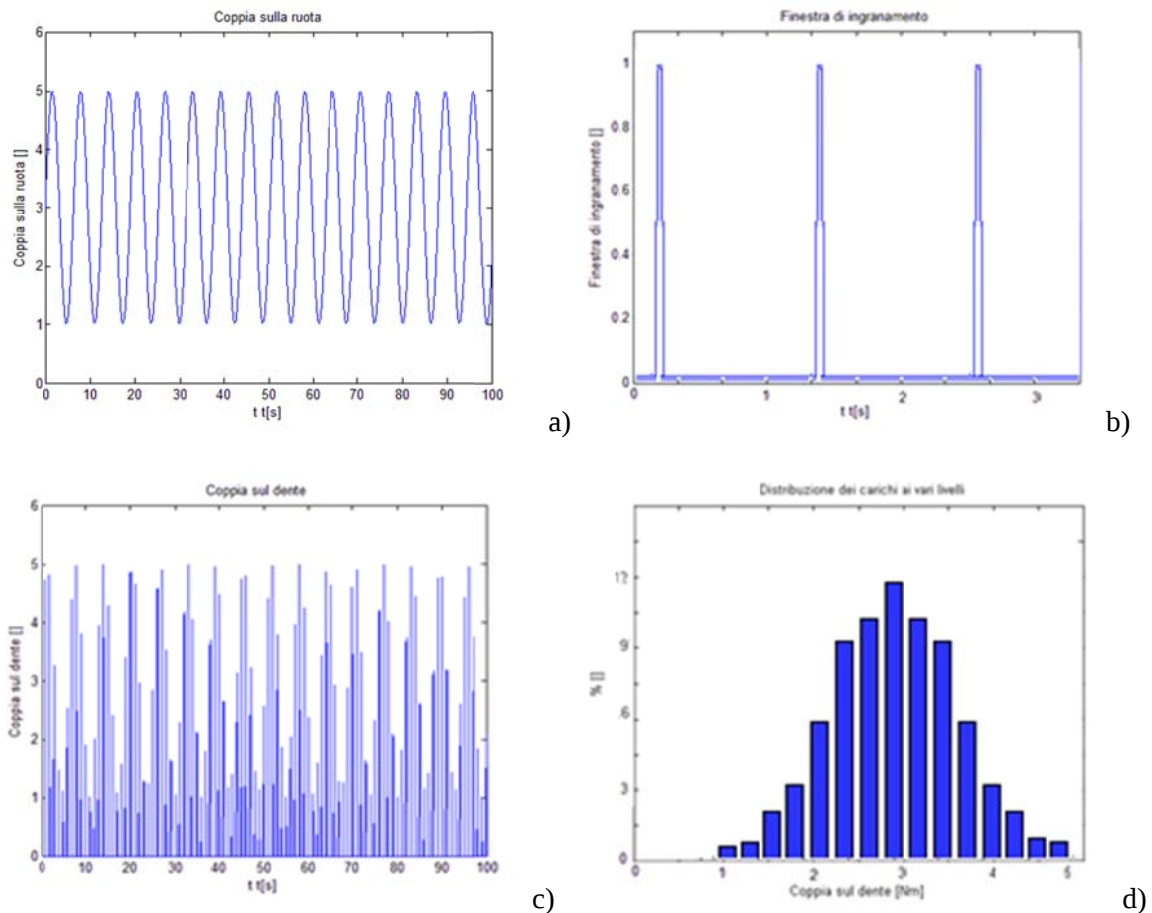


Fig.4: a) Andamento temporale (sinusoidale) della coppia sulla ruota, b) Finestra di ingranamento, c) Andamento temporale della coppia sul dente, d) Distribuzione dei carichi ai vari livelli

3. DETERMINAZIONE DEL DANNEGGIAMENTO

Calcolata la storia temporale dei carichi sulla ruota (figura 4c), è possibile effettuare un conteggio dei picchi ed una suddivisione degli stessi in base all’ampiezza. Figura 4d mostra un esempio di distribuzione dei picchi: l’andamento dipende dalle storie di carico esterne (ampiezze e frequenze) e dalle frequenze di ingranamento del rotismo considerato.

Nota la storia di carico del singolo dente e le curve caratteristiche del materiale di cui sono composte le ruote, risulta possibile andare a calcolare il danneggiamento che si è accumulato durante l’esercizio. Per fare ciò si usano i diagrammi di Wöhler e di Haigh. Noti ampiezza e valor medio di ogni ciclo si usa il diagramma di Haigh per determinare il limite di fatica per quel rapporto ciclo (rapporto tra il valore minimo ed il valore massimo del ciclo di carico) ed il diagramma di Wöhler per il danneggiamento che tale ciclo produce. Sfruttando infine la relazione di Palmgreen-Miner (4) è possibile anche stimare la vita residua del componente.

$$M = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \tag{4}$$

dove M rappresenta il danneggiamento accumulato del componente, n_i il numero di cicli al livello i -esimo di carico e N_i il numero limite di cicli a quel livello di carico.

La figura 5 mostra lo schema della trasmissione analizzata. Vi è una linea principale ed un ramo secondario per i servizi. Le storie di carico resistenti (principale e secondaria) sono mostrate in figura 6.

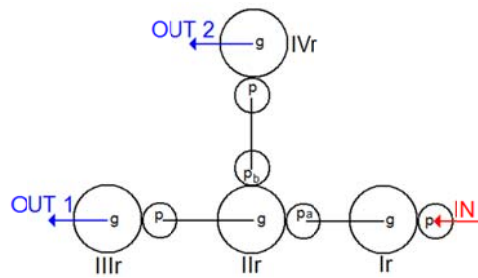


Fig.5: Schema della trasmissione

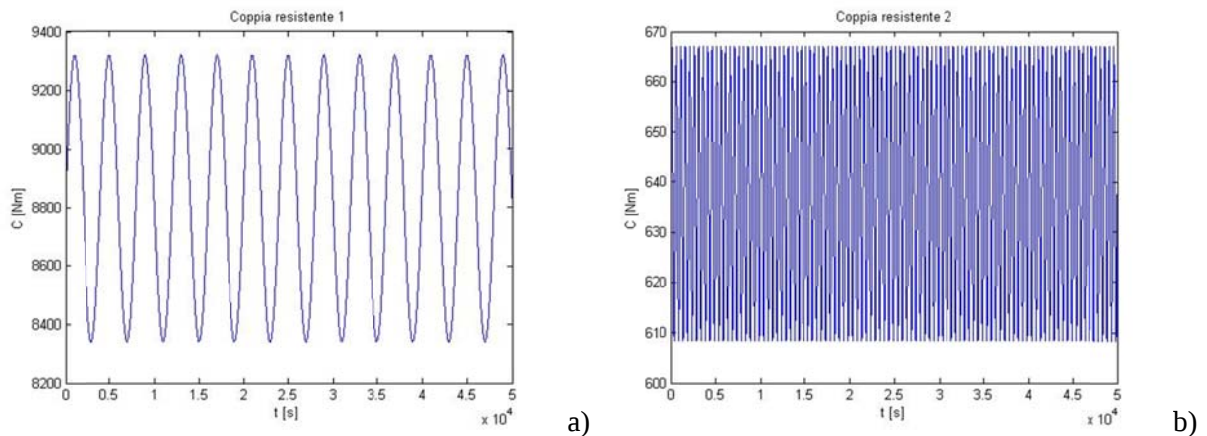


Fig.6: a) Coppia resistente reale Out1, b) Coppia resistente reale Out2

Si noti che le due storie di carico hanno valori molto differenti sia in termini di valore medio che di frequenza. La ruota della prima riduzione (IrG), ad esempio, essendo sul ramo comune della trasmissione, sarà soggetta ad un carico resistente combinazione dei due (figura 7a). Il singolo dente di tale ruota avrà invece una storia di carico come in figura 7b data dall'interazione della storia di carico sulla ruota e dalla frequenza di ingranamento.

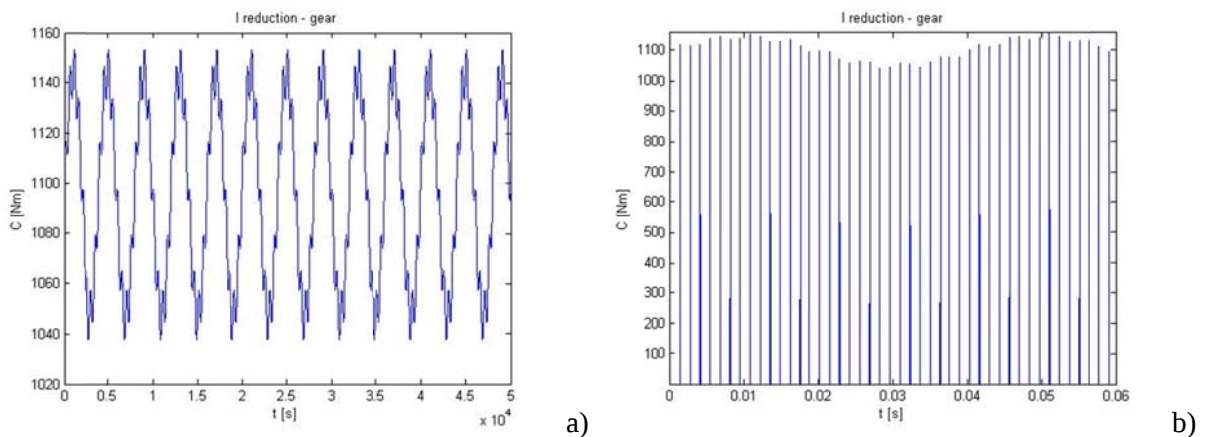


Fig.7: a) Coppia resistente reale sulla ruota della prima riduzione, b) Coppia resistente reale sul generico dente della ruota della prima riduzione

La figura 7b mostra come anche il singolo dente risenta della storia di carico a doppia frequenza venendo sollecitato da “picchi” di carico la cui ampiezza varia nel tempo come una doppia sinusoidale.

4. CONFRONTO TRA LE DIVERSE APPROSSIMAZIONI

Come detto, in fase di progettazione è pratica comune effettuare il dimensionamento a fatica della trasmissione considerando le storie di carico resistenti come costanti.

Le curve in figura 8 mostrano le frazioni di danno accumulate nell'ipotesi di approssimare l'andamento reale dei carichi lato utilizzatore con un andamento costante a valor massimo (rispetto alla storia reale), con un andamento costante a valor medio e senza introdurre approssimazioni. Tale confronto è riportato per differenti valori del parametro k : tale parametro rappresenta il livello di carico rispetto alle curve di fatica. Diminuire k significa lavorare in prossimità del limite di fatica, aumentare k significa lavorare più spostati verso la fatica a basso numero di cicli. In questo modo risulta possibile visualizzare come le suddette approssimazioni abbiano effetto differente a seconda della zona del diagramma di Wöhler in cui il componente lavora.

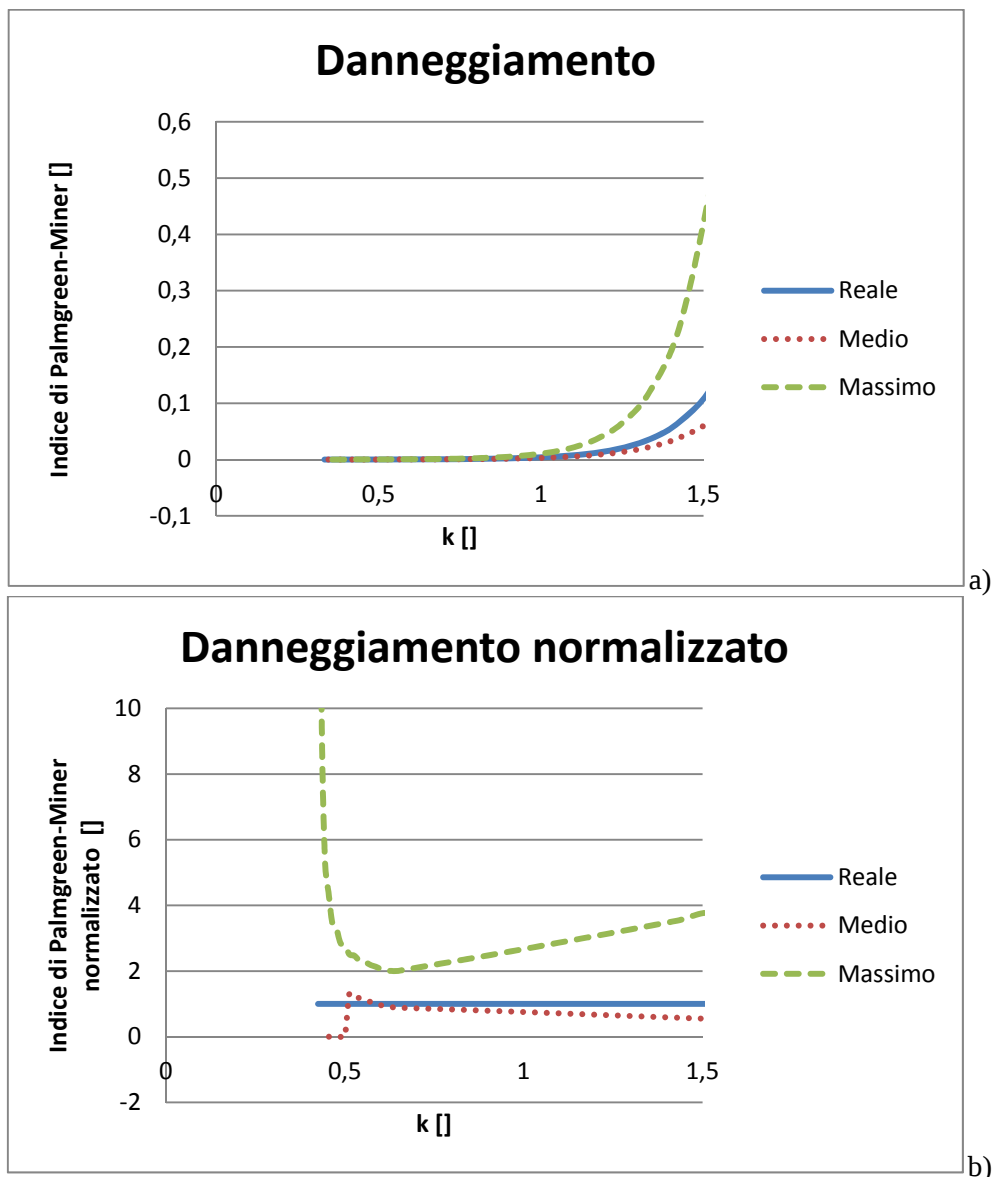


Fig.8: a) Indice di danneggiamento sulla ruota della prima riduzione in funzione delle approssimazioni introdotte e del livello di carico, b) Indice di danneggiamento sulla ruota della prima riduzione in funzione delle approssimazioni introdotte e del livello di carico normalizzato rispetto all'indice di danneggiamento dato dalla storia reale di carico

Si noti come le approssimazioni introducano errori soprattutto per livelli di lavoro prossimi agli estremi del tratto a termine. In prossimità del limite di fatica, infatti, considerare la storia di carico

costante a valor massimo fa sì che vengano considerati come danneggianti anche cicli che in realtà non lo sono e quindi si sovrastima il danneggiamento. Considerare la distribuzione costante a valor medio, invece, porta ad una sottostima del danneggiamento in quanto vengono trascurati i cicli a livello di carico più alto che in realtà portano ad un danneggiamento trovandosi nel tratto a termine della curva (se il valor medio risulta appena sotto il limite di fatica). Questo fatto è una diretta conseguenza dell'ipotesi dell'esistenza di un limite di fatica costante.

Per la distribuzione costante a valor medio, inoltre, esiste un piccolo range in cui l'indice di danneggiamento viene sovrastimato. Questo avviene per carichi (medi) appena sopra il limite di fatica: la distribuzione costante a valor medio considera come danneggianti tutti i cicli mentre in realtà, una frazione di essi non rientra nel tratto a termine in quanto ha valori inferiori al limite di fatica.

Altro aspetto fondamentale è il fatto che il diagramma di Wöhler sia lineare in un diagramma semilogaritmico. Ciò fa sì che, considerando ad esempio una distribuzione costante, si ottenga un risultato differente in termini di danneggiamento rispetto a considerare la distribuzione reale. Il peso dei vari livelli, infatti, non cresce linearmente: ciò che si "guadagna" in termini di danneggiamento considerando cicli che giacciono sotto il livello medio è meno di quello che si "perde" considerando i cicli con valore maggiore del valor medio.

Il diagramma di figura 8b mostra come, per k contenuti, ovvero quando il valor medio della distribuzione dei carichi sul dente giace in prossimità del limite di fatica (dove solitamente si progetta), l'errore che si ha nel considerare una distribuzione costante a valor medio può essere non trascurabile. Considerare una distribuzione costante a valor massimo, benché a favore di sicurezza, comporta errori ancora più elevati. Ovviamente il valore percentuale dell'errore dipende molto anche dalla storia di carico analizzata e da quanto questa oscilla nel tempo.

4. CONCLUSIONI

L'analisi qui riportata mostra l'effetto che differenti approssimazioni delle storie di sollecitazione hanno in termini di danneggiamento delle singole ruote. Progettare col valor medio produce una sottostima del reale danneggiamento. Una progettazione col valor massimo, per contro, tutela il progettista dal punto di vista della sicurezza ma comporta un notevole sovradimensionamento. Questo può sembrare un aspetto minore ma per particolari applicazioni come ad esempio nel settore aeronautico, dove la riduzione del peso è uno degli aspetti fondamentali, un miglioramento anche minimo in termini di peso può risultare fondamentale.

Il metodo qui presentato è di carattere generale e risulta applicabile ad una qualsiasi trasmissione meccanica. I vantaggi che introduce sono sostanzialmente una miglior conoscenza delle sollecitazioni reali sul singolo dente e di conseguenza permette una stima più accurata del danneggiamento consentendo una riduzione dei coefficienti di sicurezza da introdurre.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Gudehaus, H. Zenner *Leitfaden für eine Bereitsfestigkeitsrechnung*, ed. Stahl-Eisen Duesseldorf 1995
- [2] B. R. Höhn, P. Oster, K. Michaelis, T. Suchandt, K. Stahl, *Bending fatigue investigation under variable load conditions on case carburized gears*, AGMA Fall Technical Meeting, Cincinnati, Oh, October 2000
- [3] G. Niemann, H. Winter, *Elementi di macchine vol II*, ed. Springer 1986
- [4] D.W. Dudley, D.P. Townsend, *Manuale Degli Ingranaggi*, ed. Tecniche Nuove Milano 1996
- [5] P. Davoli, A. Bernasconi, M. Filippini, S. Foletti, *Comportamento meccanico dei materiali*, Ed. McGraw-Hill 2005
- [6] A. Cerrini, G. Gasparini, U. Mariani, S. Sartori, C. Gorla, M. Filippini, F. Rosa, *Bending Fatigue Test on Helicopter Nitrided Gears: Influence of Different Materials and Manufacturing Parameters*, AGMA Fall Technical Meeting 2010
- [7] G. Gasparini, U. Mariani, C. Gorla, M. Filippini, F. Rosa, *Bending Fatigue Test on Helicopter Case Carburized Gears: Influence of Materials, Design and Manufacturing Parameters*, AGMA Fall Technical Meeting 2008, (pubblicato anche su GearTechnology Novembre 2009)
- [8] ASTM E 1049-85, Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis